10.3.5 Integrování metodou per partes II

Předpoklady: 10304

Opakování z minulé hodiny: Integrační metoda per partes:

Mají-li funkce u, v v intervalu $(a;b)$ spojité derivace, pak v $(a;b)$ platí:

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx$$

Zkráceně píšeme: $\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx$

Př. 1: Vypočti: a) $\int x\ln x\,dx$ b) $\int \ln x\,dx$ c) $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$

a) $\int x\ln x\,dx$

první nápad: použijeme stejně jako v předchozích příkladech $u = x$, ale pak bychom museli počítat $v' = \ln x$, $v = \int \ln x\,dx$, ale to neumíme $\Rightarrow$ musíme použít $u = \ln x$

$$\int uv' \quad dx = uv \qquad - \int u'v\,dx$$

$$\int \ln x \cdot x\,dx = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}dx = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x}{2}dx = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$

$u = \ln x, u' = \frac{1}{x}$

$v' = x, v = \frac{x^2}{2}$

b) $\int \ln x\,dx$

problém: integrál neobsahuje součin $\Rightarrow$ vyrobíme ho pomocí jedničky $\int \ln x\,dx = \int \ln x \cdot 1\,dx$

$$\int uv' \quad dx = uv \qquad - \int u'v\,dx$$

$$\int \ln x \cdot 1\,dx = \ln x \cdot x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,dx = \ln x \cdot x - \int 1\,dx = \ln x \cdot x - x + C$$

$u = \ln x, u' = \frac{1}{x}$

$v' = 1, v = x$

c) $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$

podobně jako v předchozích příkladech

$$\int uv' \quad dx = uv \qquad -\int u'v\,dx$$

$$\int \ln x \cdot \frac{1}{x^2}\,dx = \ln x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) - \int \frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$$

$$u = \ln x, u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = \frac{1}{x^2}, v = -\frac{1}{x}$$

V integrálech se součinem logaritmu a mocniny, používáme logaritmus jako funkci *u*, která po zderivování přejde na funkci $\frac{1}{x}$

Pedagogická poznámka: V předchozím příkladu mají studenti největší problémy s bodem a), kde se stereotypně dívají na $\ln x$ jako funkci v'. Napsat jedničku do druhého integrálu napadne vcelku značné procento studentů.

Př. 2: Vypočti $\int \sin x \cdot \cos x\,dx$.

$$\int \sin x \cdot \cos x\,dx$$

Nevypadá to příliš nadějně, ani jedna z funkcí v součinu derivováním nezmizí $\Rightarrow$ zkusíme to naslepo, protože derivování je jednodušší použijeme $u = \sin x$.

$$\int uv' \quad dx \quad = \quad uv \qquad -\int u'v\,dx$$

$$\int \sin x \cdot \cos x\,dx = \sin x \cdot \sin x - \int \cos x \cdot \sin x\,dx$$

$$u = \sin x, u' = \cos x$$

$$v' = \cos x, v = \sin x$$

Vidíme, že se goniometrických funkcí nezbavíme, ale máme na obou stranách rovnice stejné integrály $\Rightarrow$ upravíme nerovnost:

$$\int \sin x \cdot \cos x\,dx = \sin x \cdot \sin x - \int \cos x \cdot \sin x\,dx$$

$$2\int \sin x \cdot \cos x\,dx = \sin^2 x + K$$

$$\int \sin x \cdot \cos x\,dx = \frac{\sin^2 x}{2} + C$$

Pedagogická poznámka: Studentů, kteří se dopočítají k rovnosti $\int \sin x \cdot \cos x\,dx = \sin x \cdot \sin x - \int \cos x \cdot \sin x\,dx$ je hodně, ale sečíst oba integrály nenapadne téměř nikoho. Je nutné tento krok studentům pořádně vysvětlit, nemá nic společného s ostatními postupy, které při integrování používáme.

Dodatek: Rychlejší a elegantnější řešení předchozího příkladu si ukážeme v přespříští hodině.

Př. 3: Vypočti: a) $\int \sin x \cdot e^x \, dx$ b) $\int \cos^2 x \, dx$.

a) $\int \sin x \cdot e^x \, dx$

Nevypadá to příliš nadějně, ani jedna z funkcí v součinu derivováním nezmizí $\Rightarrow$ zkusíme to naslepo, protože derivování je jednodušší použijeme $u = \sin x$.

$$\int uv' \, dx = uv - \int u'v \, dx$$

$$\int \sin x \cdot e^x \, dx = \sin x \cdot e^x - \int \cos x \cdot e^x \, dx = \sin x \cdot e^x - \left[\cos x \cdot e^x - \int (-\sin x) \cdot e^x \, dx\right]$$

$u = \sin x, u' = \cos x$ $\quad$ $u = \cos x, u' = -\sin x$

$v' = e^x, v = e^x$ $\quad$ $v' = e^x, v = e^x$

Po dvojím per partes jsme se vrátili na začátek. Upravíme rovnost:

$$\int \sin x \cdot e^x \, dx = \sin x \cdot e^x - \cos x \cdot e^x - \int \sin x \cdot e^x \, dx$$

$$2\int \sin x \cdot e^x \, dx = \sin x \cdot e^x - \cos x \cdot e^x$$

$$\int \sin x \cdot e^x \, dx = \frac{\sin x \cdot e^x - \cos x \cdot e^x}{2} + C$$

b) $\int \cos^2 x \, dx$

Zkusíme stejný postup jako v předchozím bodě:

$$\int uv' \, dx = uv - \int u'v \, dx$$

$$\int \cos x \cdot \cos dx = \cos x \cdot \sin x - \int (-\sin x) \cdot \sin x \, dx = \cos x \cdot \sin x + \int \sin x \cdot \sin x \, dx$$

$u = \cos x, u' = -\sin x$

$v' = \cos x, v = \sin x$

$$\int uv' \, dx = uv - \int u'v \, dx$$

$$\cos x \cdot \sin x + \int \sin x \cdot \sin x \, dx = \cos x \cdot \sin x + \left[\sin x \cdot (-\cos x) - \int \cos x \cdot (-\cos x) \, dx\right]$$

$u = \sin x, u' = \cos x$

$v' = \sin x, v = -\cos x$

upravíme rovnost:

$$\int \cos x \cdot \cos x \, dx = \cos x \cdot \sin x - \sin x \cdot \cos x + \int \cos x \cdot \cos x \, dx$$

$0 = 0$ - to je sice pravda, ale integrál jsme tím nespočítali, po dvojím uplatnění per partes jsme sice získali správný integrál, ale se špatným znamínkem.

Nápad: při integrování se objevil $\int \sin x \cdot \sin x \, dx$, ten můžeme vyrobit i bez per partes:

$$\int \cos^2 x \, dx = \int (1 - \sin^2 x) \, dx = \int 1 \, dx - \int \sin x \cdot \sin x \, dx =$$

$$\int uv' \, dx = uv - \int u'v \, dx$$

$$= x - \int \sin x \cdot \sin x \, dx = x - \left[\sin x \cdot (-\cos x) - \int \cos x \cdot (-\cos x) \, dx\right] = x + \sin x \cos x - \int \cos^2 x \, dx$$

$u = \sin x, u' = \cos x$

$v' = \sin x, v = -\cos x$

Upravíme rovnost:

$$\int \cos^2 x \, dx = x + \sin x \cos x - \int \cos^2 x \, dx$$

$$2\int \cos^2 x\,dx = x + \sin x \cos x$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{x + \sin x \cos x}{2} + C$$

Pedagogická poznámka: Bod b) samozřejmě spočítá jen málokdo. Každopádně na konci hodiny ukazuji, jak se dá tento příklad spočítat i to, jak jsem při původním postupu neuspěl.

Př. 4: Petáková:
strana 165/cvičení 90 g) h) j) l)

Shrnutí: Metoda per partes postavená na vzorci pro derivaci součinu umožňuje integrovat součiny, ve kterých se jeden ze členů derivuje k nule, nebo součiny, které se začnou opakovat.